Mesures et dimension de Hausdorff

Clément Pagès
Tutoré par Jean-François Babadjian

21 octobre 2016

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, on cherche à établir une notion de dimension intrinsèque d'un ensemble. La notion de dimension d'un espace vectoriel est liée à la notion de base. Mais on ne sait pas, a priori, donner la dimension d'un segment de droite dans $\mathbb{R}^n$ ou d'un disque. L'objet de ce travail sera d'étendre la notion de dimension à des sous-ensembles quelconques de $\mathbb{R}^n$, même très irréguliers.

Cela nous conduira à étudier les mesures de Hausdorff, qui généralisent la notion de longueur (en dimension 1), de surface (en dimension 2) et leurs analogues en dimension plus grande. Elles sont construites *via* la méthode de Carathéodory, qui constituera la première partie de l'étude. Une fois les mesures de Hausdorff construites, nous étudierons leurs propriétés et en extrairons une notion plus générale et *intrinsèque* de dimension pour une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$. Nous verrons également que la mesure de Hausdorff de dimension n dans $\mathbb{R}^n$ et la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ sont égales ; les mesures de Hausdorff généralisent donc la mesure de Lebesgue. Enfin, pour illustrer la notion de dimension de Hausdorff et avoir un aperçu de sa généralité, nous calculerons la dimension de l'ensemble triadique de Cantor.

1 Définitions et notations

1.1 Topologie et géométrie

— Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien est noté $\langle x|y\rangle$ et est défini par :

$$\langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$$

x et y sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle x|y\rangle = 0$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne de x est notée $\|x\|$:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

— Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distance entre x et y est notée $\operatorname{dist}(x, y) = \|x - y\|$.

— Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Le diamètre de E est noté $\operatorname{diam} E$ et est défini par :

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x,y\in E} \|x - y\|$$

— Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, $B(x,r) \overset{\text{déf.}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x,y) < r\}$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r.
— Si E est une partie de $\mathbb{R}^n$, l'adhérence de E est notée $\overline{E}$ et désigne le plus petit fermé contenant E. En particulier, $\overline{B}(x,r)$ désigne la boule fermée de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$.
— Si $E \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{R}(E)$ la classe des recouvrements dénombrables de E.
— Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de E. S'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam} E_k \leq \delta$, on dit que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement *de pas* δ de E, ou un δ-recouvrement de E. La classe des recouvrements de pas δ de E sera notée $\mathcal{R}_\delta(E)$.
— Si $E \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{Q}(E)$ la classe des recouvrements de E par des cubes de $\mathbb{R}^n$ dont les côtés sont tous parallèles aux axes de coordonnées.
— Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. On note $\mathcal{Q}_\delta(E)$ la classe des δ- recouvrements de E par des cubes dont les côtés sont tous parallèles aux axes de coordonnées.
— Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$. On note $\lambda E = \{\lambda x \mid x \in E\}$.
— Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On définit l'ensemble E translaté de x par $x + E = \{x + y \mid y \in E\}$

1.2 Tribus, mesurabilité

Définition 1.1 (Tribu)**.** On dit qu'une famille $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une *tribu* si et seulement si :

(i) $\varnothing \in \mathcal{E}$.

(ii) $\forall E \in \mathcal{E},\ E^{\complement} \in \mathcal{E}$.

(iii) Si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{E}$.

Définition 1.2 (Mesure)**.** Soit $\mathcal{E}$ une tribu sur $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une application $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ est une mesure sur $\mathcal{E}$ si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) Pour toute suite $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k)$$

Cette propriété s'appelle la *σ-additivité.*

On dit que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ est un *espace mesurable* et que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}, \mu)$ est un *espace mesuré.* Les ensembles contenus dans $\mathcal{E}$ sont appelés les ensembles *μ-mesurables*, ou simplement *mesurables* en l'absence d'ambiguïté.

Dans le cadre de ce travail, nous allons nous intéresser à des tribus sur $\mathbb{R}^n$. La tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^n$, engendrée par les ouverts, sera notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. En passant au complémentaire, on voit que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est aussi la tribu engendrée par les fermés de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une mesure μ est borélienne si elle est définie sur une tribu $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On dit qu'une mesure μ est *σ-finie* s'il existe un recouvrement de $\mathbb{R}^n$ par des ensembles μ-mesurables de mesures finies.

1.3 Mesures extérieures

Définition 1.3 (Mesure extérieure)**.** Une *mesure extérieure* est une application $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) Pour toute suite $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^n$,

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \Longrightarrow \mu(E) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k)$$

Cette propriété est appelée a *σ-sous-additivité.*

En toute première remarque, observons qu'une mesure extérieure μ est nécessairement croissante (au sens de l'inclusion) :

$$E \subset F \implies \mu(E) \leq \mu(F)$$

Enfin, rappelons la définition de la mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4 (Mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On définit λ^n la mesure extérieure de Lebesgue de E par :

$$\lambda^n(E) \overset{\text{déf.}}{=} \inf_{(E_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{Q}(E)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{\sqrt{n}} \right)^n \right)$$

On peut faire de la mesure extérieure de Lebesgue une mesure borélienne. Rappelons à ce sujet quelques résultats d'existence et d'unicité de la mesure de Lebesgue.

Théorème 1.5 (Existence et unicité de la mesure de Lebesgue)**.** *Il existe une unique mesure μ borélienne, invariante par translation, qui coïncide sur les pavés avec le volume, i.e. telle que pour tous intervalles fermés $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$,*

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{n} [\sup I_k, \inf I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mu(\sup I_k - \inf I_k)$$

De plus,

$$\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ \mu(E) = \lambda^n(E)$$

Par abus de langage, on dira souvent « mesure de Lebesgue » à la place de « mesure extérieure de Lebesgue ».

Proposition 1.6. *La mesure de Lebesgue est invariante par rotations.*

Proposition 1.7. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ un ouvert contenant E, tel que $\lambda^n(E) + \varepsilon \geq \lambda^n(A)$.*

2 Méthode de Carathéodory

La méthode de Carathéodory est un procédé permettant de construire des mesures. Elle s'inspire de la mesure de Lebesgue et fournit un procédé plus général de construction des mesures. Elle s'appuie sur deux résultats. Le premier théorème permet, étant donnée une mesure extérieure μ, de trouver une tribu sur $\mathbb{R}^n$ sur laquelle μ est une mesure. Le deuxième théorème donne un critère permettant de savoir si cette tribu contient les boréliens.

2.1 Théorème de Carathéodory

Théorème 2.1 (Théorème de Carathéodory)**.** *Soit μ une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$. On définit $\mathcal{M}(\mu) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$\mathcal{M}(\mu) = \{E \subset \mathbb{R}^n \mid \forall F \subset \mathbb{R}^n, \mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E)\}$$

Alors, $\mathcal{M}(\mu)$ est une tribu sur $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mu), \mu)$ est un espace mesuré.

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{M}(\mu)$ est une tribu.

(i) Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. Comme μ est une mesure extérieure, $\mu(\varnothing) = 0$ donc $\mu(F \cap \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$ et $\mu(F \setminus \varnothing) = \mu(F)$. Donc $\mu(F) = \mu(F \cap \varnothing) + \mu(F \setminus \varnothing)$ i.e. $\varnothing \in \mathcal{M}(\mu)$.

(ii) Soit $E \in \mathcal{M}(\mu)$. Montrons que $E^{\complement} \in \mathcal{M}(\mu)$. Pour $F \subset \mathbb{R}^n$, on écrit :

$$\begin{aligned}\mu(F) &= \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \\ &= \mu(F \setminus E^{\complement}) + \mu(F \cap E^{\complement})\end{aligned}$$

Donc $E^{\complement} \in \mathcal{M}(\mu)$.

(iii) Reste à vérifier que $\mathcal{M}(\mu)$ est stable par union dénombrable. Soient $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{M}(\mu))^{\mathbb{N}}$ et $E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k$. Il s'agit de montrer que $E \in \mathcal{M}(\mu)$.
En premier lieu, démontrons par récurrence que :

$$\mu(F) = \mu\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k} E_m\right) + \sum_{m=0}^{k} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} E_j\right) \cap E_m\right) \tag{2.1}$$

Étant donné que $E_0 \in \mathcal{M}(\mu)$, $\mu(F) = \mu(F \setminus E_0) + \mu(F \cap E_0)$. Or, $E_1 \in \mathcal{M}(\mu)$, donc on a également, en remplaçant F par $F \setminus E_0$ dans la définition :

$$\begin{aligned}\mu(F \setminus E_0) &= \mu((F \setminus E_0) \setminus E_1) + \mu((F \setminus E_0) \cap E_1) \\ &= \mu(F \setminus (E_0 \cup E_1)) + \mu((F \setminus E_0) \cap E_1)\end{aligned}$$

Donc,

$$\mu(F) = \mu(F \setminus (E_0 \cup E_1)) + \mu((F \setminus E_0) \cap E_1) + \mu(F \cap E_0),$$

ce qui initialise la récurrence. Pour l'hérédité, on suppose que pour un entier naturel $k \geq 1$, on a :

$$\mu(F) = \mu\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} E_m\right) + \sum_{m=0}^{k-1} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} E_j\right) \cap E_m\right) \tag{2.2}$$

Par hypothèse, $E_k \in \mathcal{M}(\mu)$ donc :

$$\begin{aligned}\mu\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} E_m\right) &= \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} E_m\right) \setminus E_k\right) + \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} E_m\right) \cap E_k\right) \\ &= \mu\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k} E_m\right) + \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} E_m\right) \cap E_k\right)\end{aligned}$$

Donc, (2.2) devient :

$$\begin{aligned}\mu(F) &= \mu\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k} E_m\right) + \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k-1} E_m\right) \cap E_k\right) + \sum_{m=0}^{k-1} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} E_j\right) \cap E_m\right) \\ &= \mu\left(F \setminus \bigcup_{m=0}^{k} E_m\right) + \sum_{m=0}^{k} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} E_j\right) \cap E_m\right),\end{aligned}$$

ce qui démontre (2.1) et conclut la récurrence.
Par construction, $F \setminus E \subset F \setminus \bigcup_{m=0}^{k} E_m$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\mu(F) \geq \mu(F \setminus E) + \sum_{m=0}^{k} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} E_j\right) \cap E_m\right)$$

Lorsque $k \to +\infty$, on en déduit que :

$$\mu(F) \geq \mu(F \setminus E) + \sum_{m=0}^{+\infty} \mu\left(\left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} E_j\right) \cap E_m\right) \tag{2.3}$$

Donc, par σ-sous-additivité de μ, il vient :

$$\begin{aligned}\mu(F) &\geq \mu(F \setminus E) + \mu\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty}\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} E_j\right) \cap E_m\right)\right)\\ &= \mu(F \setminus E) + \mu(F \cap E)\end{aligned}$$

De plus, $F = (F \setminus E) \cup (F \cap E)$ et μ est une mesure extérieure donc $\mu(F) \leq \mu(F \setminus E) + \mu(F \cup E)$. Ainsi, $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(F \cup E)$. En conclusion, $E \in \mathcal{M}(\mu)$.

Ainsi, on a montré que $\mathcal{M}(\mu)$ est une tribu sur $\mathbb{R}^n$. Démontrons maintenant que μ définit une mesure sur $\mathcal{M}(\mu)$, faisant ainsi de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mu), \mu)$ un espace mesuré. Pour ce faire, soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}(\mu)$ d'ensembles deux à deux disjoints. Dans (2.3), on prend $F = E$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) &\geq \mu(\varnothing) + \sum_{m=0}^{+\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} E_j \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} E_j\right) \cap E_m\right)\\ &\geq \sum_{m=0}^{+\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{j=m}^{+\infty} E_j\right) \cap E_m\right)\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mu(E_m)\end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration du théorème 2.1. □

Ce théorème donne un critère simple permettant de vérifier si $\mathcal{M}(\mu) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et si une mesure extérieure est une mesure sur cette tribu.

2.2 Critère de Carathéodory

Théorème 2.2 (Critère de Carathéodory)**.** *Soit μ une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$. μ est une mesure borélienne si et seulement si :*

$$\forall E, F \subset \mathbb{R}^n,\ \operatorname{dist}(E, F) > 0 \Longrightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) \tag{2.4}$$

Démonstration. On raisonne par double implication.

En premier lieu, supposons que μ est une mesure borélienne. Démontrons (2.4). Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$, tels que $\operatorname{dist}(E, F) > 0$. En tant qu'ensemble fermé, $\overline{E}$ est un borélien donc est μ-mesurable. En outre, $\overline{E}$ et F sont disjoints. Donc, d'après le théorème de Carathéodory, on a :

$$\begin{aligned}\mu(E \cup F) &= \mu\left((E \cup F) \cap \overline{E}\right) + \mu\left((E \cup F) \setminus \overline{E}^{\complement}\right)\\ &= \mu(E) + \mu(F)\end{aligned}$$

Pour l'implication réciproque, on suppose que l'assertion (2.4) est satisfaite. On remarque qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ appartient à $\mathcal{M}(\mu)$ si et seulement si pour tout $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mu(F) < +\infty, \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E)$, car μ est σ-sous-additive. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par les ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$, il suffit de montrer que pour tout fermé E de $\mathbb{R}^n$,

$$\forall F \subset \mathbb{R}^n,\ \mu(F) < +\infty \Longrightarrow \mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E)$$

Soient donc $E \subset \mathbb{R}^n$ un fermé et $F \subset \mathbb{R}^n$ de mesure extérieure finie. On pose :

$$F_0 = \{x \in F \mid \operatorname{dist}(x, E) \geq 1\}$$
$$\forall k \geq 1,\ F_k = \left\{x \in F \,\middle|\, \frac{1}{k+1} \leq \operatorname{dist}(x, E) < \frac{1}{k}\right\}$$

Si $k, \ell \in \mathbb{N}$ avec $k \neq \ell$, alors $F_k \cap F_\ell = \varnothing$. De plus, $\bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k = F \setminus E$. Donc $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de $F \setminus E$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\mu(F \setminus E) &= \mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{N} F_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=N+1}^{+\infty} F_k\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{N} F_k\right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(F_k),
\end{aligned}$$

quel que soit $N \in \mathbb{N}$. Donc, quel que soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(F \cap E) + \mu\left(\bigcup_{k=0}^{N} F_k\right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(F_k) \tag{2.5}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}, \operatorname{dist}(F_k, E) > 0$ donc :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \operatorname{dist}\left((F \cap E), \left(\bigcup_{k=0}^{N} F_k\right)\right) > 0$$

Donc, on déduit de (2.5), que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) &\leq \mu\left((F \cap E) \cup \bigcup_{k=0}^{N} F_k\right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(F_k) \\
&\leq \mu(F) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(F_k)
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(F_k) = 0 \tag{2.6}$$

Si $N \in \mathbb{N}$, la partie entière de N est notée $[N]$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \mu(F_k) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \mu(F_{2k}) + \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \mu(F_{2k+1}) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} F_{2k}\right) + \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} F_{2k+1}\right) \\
&\leq \mu(F) + \mu(F)
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(F_k) &\leq 2\mu(F) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum \mu(F_k)$ est une série convergente donc (2.6) est vérifiée, ce qui démontre (2.4). □

3 Mesures et dimension de Hausdorff

3.1 Définitions

On notera Γ la fonction gamma d'Euler, définie comme suit :

$$\Gamma : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[\\ \qquad s \longmapsto \displaystyle\int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \end{cases}$$

On notera également v_s la quantité suivante :

$$v_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1 + s/2)}$$

Lorsque $s = k \in \mathbb{N}^*$, v_k correspond au volume de la boule unité de $\mathbb{R}^k$. Et lorsque $s = 0$, on a simplement $v_0 = 1$.

Définition 3.1 (Mesure de Hausdorff de dimension s et de pas δ)**.** Soient $s \in [0, +\infty[, \delta \in]0, +\infty]$ et $E \subset \mathbb{R}^n$. La *mesure extérieure de Hausdorff de dimension s et de pas δ* de l'ensemble E est définie par :

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf_{\mathcal{F} \in \mathcal{R}_\delta(E)} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} F}{2} \right)^s \right), \tag{3.1}$$

Par abus de langage, et pour alléger les formulations, $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ est parfois appelée mesure de Hausdorff s-dimensionnelle de pas δ de E.

Remarquons que dans la relation (3.1), la classe des recouvrements $\mathcal{R}_\delta(E)$ se restreint lorsque δ décroît. En conséquence, $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ admet une limite lorsque $\delta \to 0^+$. Cela mène à la définition suivante.

Définition 3.2 (Mesure de Hausdorff de dimension s)**.** Soient $s \in [0, +\infty[$ et $E \subset \mathbb{R}^n$. On appelle *mesure de Hausdorff de E de dimension s* la quantité, notée $\mathcal{H}^s(E)$, suivante :

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta \in]0, +\infty]} \mathcal{H}^s_\delta(E) \tag{3.2}$$

$\mathcal{H}^s$ est parfois appelée la mesure de Hausdorff s-dimensionnelle.

Le lien avec les dimensions sera justifié plus tard. Commençons par justifier que, quel que soit $s \in [0, +\infty[$, $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure, à travers la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Soit $s \in [0, +\infty[$. $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. L'ensemble vide admet un recouvrement par des ensembles de diamètre 0 donc clairement $\mathcal{H}^s_\delta(\varnothing) = 0$.

Soient $\varepsilon, \delta > 0$. Soit $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier naturel k, on considère $(C_k^j)_{j \in \mathbb{N}}$ un δ-recouvrement de E_k tel que :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} C_k^j}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Ainsi, quel que soit $k \in \mathbb{N}, E_k \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} C_k^j$ et $\operatorname{diam} C_k^j \leq \delta$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{j=0}^{+\infty} C_k^j$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) &\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} C_k^j}{2}\right)^s \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathcal{H}^s_\delta(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{H}^s_\delta(E_k) + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui donne, en faisant tendre ε vers 0,

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{H}^s_\delta(E_k)$$

Il en découle que $\mathcal{H}^s_\delta$ est une mesure extérieure. Or,

$$\forall E \subset \mathbb{R}^n,\ \mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta \in]0,+\infty]} \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

En tant que borne supérieure de mesures extérieures, $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure. $\square$

Quel que soit $s \in [0, +\infty[$, $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure ; une attente naturelle serait d'obtenir une mesure en appliquant les théorèmes de Carathéodory étudiés dans la partie précédente.

Théorème 3.4. *Soit $s \in [0, +\infty[$. $\mathcal{H}^s$ est une mesure borélienne.*

Remarque. C'est ce théorème qui justifie que l'on omette souvent de préciser « mesure extérieure » lorsque l'on désigne une mesure de Hausdorff.

Démonstration. On utilise le critère de Carathéodory (théorème 2.2). Pour ce faire, soient E et F deux parties de $\mathbb{R}^n$ telles que $\operatorname{dist}(E, F) \geq \varepsilon > 0$. Étant donné que $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure, $\mathcal{H}^s(E \cup F) \leq \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$. Démontrons l'autre inégalité.

Fixons $\delta > 0$ tel que $\delta < \varepsilon/2$. Soit $\mathcal{C} = (C_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\delta(E \cup F)$. Alors, il existe $\mathcal{C}_1 = (C_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{C}_2 = (C_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ deux sous-suites de $\mathcal{C}$ telles que $\mathcal{C}_1$ soit un δ-recouvrement de E et $\mathcal{C}_2$ soit un δ-recouvrement de F avec :

$$\forall C_1 \in \mathcal{C}_1, \forall C_2 \in \mathcal{C}_2,\ C_1 \cap C_2 = \varnothing$$

Comme $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des suites extraites de $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{C\in\mathcal{C}} v_s\left(\frac{\operatorname{diam} C}{2}\right)^s &\geq \sum_{C\in\mathcal{C}_1} v_s\left(\frac{\operatorname{diam} C}{2}\right)^s + \sum_{C\in\mathcal{C}_2} v_s\left(\frac{\operatorname{diam} C}{2}\right)^s \\
&\geq \inf_{\mathcal{C}_1\in\mathcal{R}_\delta(E)} \sum_{C\in\mathcal{C}_1} v_s\left(\frac{\operatorname{diam} C}{2}\right)^s + \inf_{\mathcal{C}_2\in\mathcal{R}_\delta(F)} \sum_{C\in\mathcal{C}_2} v_s\left(\frac{\operatorname{diam} C}{2}\right)^s \\
&= \mathcal{H}^s_\delta(E) + \mathcal{H}^s_\delta(F)
\end{aligned}$$

Par passage à la borne inférieure sur $\mathcal{C} \in \mathcal{R}_\delta(E)$, il s'ensuit que :

$$\mathcal{H}^s_\delta(E \cup F) \geq \mathcal{H}^s_\delta(E) + \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Enfin, en faisant $\delta \to 0$, il vient $\mathcal{H}^s(E \cup F) \geq \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$. En conséquence du critère de Carathéodory, $\mathcal{H}^s$ est une mesure borélienne. □

Les mesures de Hausdorff permettent d'introduire une notion de dimension, qui généralise celle de dimension d'un espace vectoriel (en dimension finie). Ainsi, on saura donner la dimension de n'importe quelle partie E de $\mathbb{R}^n$; en outre, si E est un sous-espace vectoriel, sa dimension de Hausdorff sera la dimension habituelle.

En plus de calculer la dimension des espaces vectoriels, on pourra calculer la dimension d'une droite affine (elle sera égale à 1), d'un disque contenu dans $\mathbb{R}^n$ (la dimension sera 2) ou de certains ensembles plus compliqués tels que l'ensemble triadique de Cantor.

La définition de la dimension de Hausdorff repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Soient E une partie de $\mathbb{R}^n$, $s \in [0, +\infty[$ et $t \in]s, +\infty[$, de sorte que $0 \leq s < t < +\infty$. Alors :*

$$\mathcal{H}^s(E) < +\infty \implies \mathcal{H}^t(E) = 0 \tag{3.3}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{H}^t(E) > 0 \implies \mathcal{H}^s(E) = +\infty$$

Démonstration. En premier lieu, les deux implications sont équivalentes, car elles sont contraposées l'une de l'autre. Démontrons (3.3). Pour ce faire, fixons $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Par hypothèse, $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$. Soit donc $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\delta(E)$ tel que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^s &\leq \mathcal{H}^s_\delta(E) + \varepsilon \\
&\leq \mathcal{H}^s(E) + \varepsilon \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(E) &\leq v_t \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^t \\
&= v_t \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^{t-s+s} \\
&= \frac{v_t}{2^{t-s}} \sum_{k=0}^{+\infty} (\operatorname{diam} E_k)^{t-s} \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^s \\
&\leq \frac{v_t}{2^{t-s}} \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^{t-s} \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^s \\
&= \frac{v_t}{2^{t-s}} \delta^{t-s} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^s \\
&\leq \frac{v_t}{2^{t-s}} \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(E) + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Comme $t > s$, δ^{t-s} tend vers 0 lorsque δ tend vers 0. Donc $\mathcal{H}^t_\delta(E)$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0, i.e. $\mathcal{H}^t(E) = 0$. $\square$

Ce lemme dit que, pour toute partie E de $\mathbb{R}^n$, la fonction $s \mapsto \mathcal{H}^s(E)$ « saute » de la valeur $+\infty$ à la valeur 0. Néanmoins, il n'existe pas nécessairement un réel s tel que $0 < \mathcal{H}^s(E) < +\infty$. Dans tous les cas, la dimension de Hausdorff de E sera la valeur de s pour laquelle $\mathcal{H}^s(E)$ passe de la valeur $+\infty$ à la valeur 0. Plus précisément, on donne la définition suivante.

Définition 3.6 (Dimension de Hausdorff)**.** Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$. On appelle *dimension de Hausdorff* de E le nombre réel, noté $\dim_{\mathcal{H}} E$, vérifiant :

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathcal{H}} E &= \inf\{s \in [0, +\infty[\mid \mathcal{H}^s(E) = 0\} \\
&= \sup\{t \in [0, +\infty[\mid \mathcal{H}^t(E) = +\infty\}
\end{aligned}$$

Pour simplifier, on dira simplement « dimension » à la place de « dimension de Hausdorff », sauf en cas d'ambiguïté.

Si $E \subset \mathbb{R}^n$, le lemme 3.5 garantit l'unicité du réel $\dim_{\mathcal{H}} E$, assurant que la définition a un sens.

3.2 Propriétés importantes et interprétation dimensionnelle

Dans cette partie, nous allons énoncer et démontrer quelques propriétés des mesures de Hausdorff. Un certain nombre de ces résultats pourront être interprétés en terme de dimension de Hausdorff, ce qui contribuera à légitimer la terminologie de « dimension ».

Proposition 3.7 (Propriétés élémentaires de la dimension de Hausdorff)**.** *(i) Si $E, F \subset \mathbb{R}^n$ avec $E \subset F$, alors $\dim_{\mathcal{H}} E \leq \dim_{\mathcal{H}} F$.*

(ii) Soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}}(\dim_{\mathcal{H}} E_k)$$

Démonstration. Pour le premier point, fixons E et F deux parties de $\mathbb{R}^n$ avec $E \subset F$. Quel que soit $s \in [0, +\infty[$, $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$. Donc :

$$\begin{aligned} & \inf\{s \in [0, +\infty[\mid \mathcal{H}^s(E) = 0\} \leq \inf\{s \in [0, +\infty[\mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} \\ \text{i.e.} \quad & \dim_{\mathcal{H}} E \leq \dim_{\mathcal{H}} F \end{aligned}$$

Pour le deuxième point, soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}^n$. Il est clair, par monotonie, que :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) \geq \dim_{\mathcal{H}} E_j$$

Il reste à démontrer l'inégalité inverse. Soit $s > \max_{k\in\mathbb{N}} \dim_{\mathcal{H}}(E_k)$. Alors, quel que soit $k \in \mathbb{N}, \mathcal{H}^s(E_k) = 0$, donc

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) = 0$$

Donc $\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) \leq s$ et donc :

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) \leq \max_{k\in\mathbb{N}} \dim_{\mathcal{H}}(E_k),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Proposition 3.8. *Soit $s \in [0, +\infty[$. $\mathcal{H}^s$ est invariante par translation, i.e.*

$$\forall E \subset \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \mathcal{H}^s(x + E) = \mathcal{H}^s(E)$$

Démonstration. Soit $\delta \in]0, +\infty]$. On écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(x+E) &= \inf_{\mathcal{F}\in\mathcal{R}_\delta(E)} \sum_{F\in\mathcal{F}} v_s\left(\frac{\operatorname{diam}(x+F)}{2}\right)^s \\ &= \inf_{\mathcal{F}\in\mathcal{R}_\delta(E)} \sum_{F\in\mathcal{F}} v_s\left(\frac{\operatorname{diam} F}{2}\right)^s \\ &= \mathcal{H}^s_\delta(E)\end{aligned}$$

Et donc, lorsque $\delta \to 0$, il s'ensuit que $\mathcal{H}^s(x+E) = \mathcal{H}^s(E)$. □

Cet énoncé dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ et n'importe quelle translation de E ont la même dimension.

Une autre propriété importante des mesures de Hausdorff est leur comportement face aux homothéties [1]. On a en effet la propriété suivante.

Proposition 3.9. *Soient $s \in [0, +\infty[$ et $\lambda > 0$. Pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$$

Démonstration. Soient $\delta > 0$ et $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un δ-recouvrement de E. Par construction, $(\lambda E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un $\lambda\delta$-recouvrement de λE. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} v_s\left(\frac{\operatorname{diam}(\lambda E_k)}{2}\right)^s &= \sum_{k=0}^{+\infty} v_s \lambda^s \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^s \\ &= \lambda^s \sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^s\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(E)$. Enfin, en passant à la limite lorsque $\delta \to 0$, il s'ensuit que $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$. □

En terme de dimension, cela indique que la dimension de Hausdorff est invariante par homothéties (ce qui est conforme à l'intuition).

Proposition 3.10. *Si $s > n$, alors $\mathcal{H}^s = 0$.*

Démonstration. Soit $s > n$ un nombre réel. Il s'agit de montrer que pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Par monotonie de $\mathcal{H}^s$, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$. On pose $C = [0, 1[^n$, et on commence par montrer que $\mathcal{H}^s(C) = 0$.

Fixons un entier naturel k non nul. On cherche à construire une partition de C par des cubes de diamètres $\frac{\sqrt{n}}{k}$. Pour $a \in [\![0, k-1]\!]^n$, on pose $Q_a = \frac{a}{k} + \left[0, \frac{1}{k}\right[^n$ et on note $\mathcal{C} = \bigcup_{a\in[\![0,k-1]\!]^n} Q_a$. Montrons que $C = \mathcal{C}$.

1. On rappelle qu'une homothétie est une application linéaire définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ par $x \mapsto \lambda x$, avec $\lambda \geq 0$.

Soit $x \in \mathcal{C}$. Il existe $a \in [\![0, k-1]\!]^n$ et $c \in \left[0, \frac{1}{k}\right[$ tel que $x = \frac{a}{k} + c$. Donc, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $0 \leq x_i < \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k} = 1$. Donc $x \in [0, 1[^n = C$.

Réciproquement, soit $x \in C$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, x_i s'écrit $x_i = \frac{[kx_i]}{k} + \frac{kx_i - [kx_i]}{k}$, où $[kx_i] \in [\![0, k-1]\!]$ et $\frac{kx_i - [kx_i]}{k} \in \left[0, \frac{1}{k}\right[$. Autrement dit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists a_i \in [\![0, k-1]\!], \exists c_i \in \left[0, \frac{1}{k}\right[, \ x_i = \frac{a_i}{k} + c_i$$

Donc

$$\exists a \in [\![0, k-1]\!]^n, \exists c \in \left[0, \frac{1}{k}\right[^n, \ x = a + c$$

Donc $x \in \mathcal{C}$. Comme les éléments de $\mathcal{C}$ sont deux à deux disjoints, $\mathcal{C}$ forme une partition de C par k^n cubes de diamètre $\frac{\sqrt{n}}{k}$. On note donc $\mathcal{C} = (Q_1, \ldots, Q_{k^n})$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{k}}(C) &\leq \sum_{j=1}^{k^n} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} Q_j}{2}\right)^s \\ &= \sum_{j=1}^{k^n} v_s \left(\frac{\sqrt{n}}{2k}\right)^s \\ &= k^n v_s \left(\frac{\sqrt{n}}{2k}\right)^s \\ &= v_s \frac{n^{s/2}}{2^s} k^{n-s} \end{aligned}$$

Comme $s > n$, $\lim_{k \to +\infty} k^{n-s} = 0$ donc $\lim_{k \to +\infty} \mathcal{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{k}}(C) = 0$ i.e. $\mathcal{H}^s(C) = 0$.

Étendons ce résultat à $\mathbb{R}^n$. On remarque que $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} kC$$

D'après la proposition 3.9, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}^s(kC) = k^s \mathcal{H}^s(C) = 0$. En passant à la limite lorsque $k \to +\infty$, il vient :

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$$

$\mathbb{R}^n$ est de mesure de Hausdorff s-dimensionnelle nulle, donc il en est de même pour toutes les parties de $\mathbb{R}^n$, par monotonie de $\mathcal{H}^s$. $\square$

Une conséquence de ce résultat est que la dimension d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est inférieure ou égale à n. De fait, quel que soit $E \subset \mathbb{R}^n$, la dimension de E est

$$\dim_{\mathcal{H}} E = \inf\{s \in [0, +\infty[\mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}$$

Comme pour tout $s > 0, \mathcal{H}^s(E) = 0$, il découle que $\dim_{\mathcal{H}} E \leq n$. Cela donne de la pertinence au choix du terme « dimension ».

Proposition 3.11. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction α-lipschitzienne, avec $\alpha > 0$, i.e. :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \tag{3.4}$$

Alors,

$$\forall E \subset \mathbb{R}^n, \forall s \in [0, +\infty[,\ \mathcal{H}^s(f(E)) \leq \alpha^s \mathcal{H}^s(E)$$

Démonstration. Soient $\delta > 0$ et $\mathcal{E} \in \mathcal{R}_\delta(E)$. Alors, $\{f(F) \mid F \in \mathcal{E}\}$ est un recouvrement de $f(E)$ tel que $\operatorname{diam}(f(E)) \leq \alpha \operatorname{diam}(E) \leq \alpha\delta$. Donc :

$$\mathcal{H}^s_{\alpha\delta}(f(E)) \leq \alpha^s \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

Ainsi, lorsque $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^s(f(E)) \leq \alpha^s \mathcal{H}^s(E)$. □

Proposition 3.12. *$\mathcal{H}^0$ est la mesure (extérieure) de comptage, i.e. pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$ fini, $\mathcal{H}^0(E) = \operatorname{Card} E$ et pour tout $F \subset \mathbb{R}^n$ infini (dénombrable ou non), $\mathcal{H}^0(F) = +\infty$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $\delta > 0$, le singleton $\{x\}$ est le plus petit δ-recouvrement de $\{x\}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0_\delta &= v_0 \left(\frac{\operatorname{diam}\{x\}}{2} \right)^0 \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

En faisant tendre δ vers 0, on trouve que $\mathcal{H}^0(\{x\}) = 1$. Or, $\mathcal{H}^0$ est une mesure borélienne. Donc, si E est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(E) &= \mathcal{H}^0 \left(\bigcup_{x \in E} \{x\} \right) \\ &= \sum_{x \in E} \mathcal{H}^0(\{x\}) \\ &= \sum_{x \in E} 1 \end{aligned}$$

Si E est fini, on en déduit que $\mathcal{H}^0(E) = \operatorname{Card} E$; si E est infini dénombrable, $\mathcal{H}^0(E) = +\infty$. Si E est indénombrable, E admet un sous-ensemble infini dénombrable F et par monotonie, $\mathcal{H}^0(E) \geq \mathcal{H}^0(F) = +\infty$. □

À nouveau, cette propriété s'interprète en terme de dimension de Hausdorff. En effet, elle indique que si E est un ensemble fini ou dénombrable, alors $\dim_{\mathcal{H}} E = 0$. Supposons $E = \{x_1, \dots, x_k\}$, avec $k \in \mathbb{N}$. Alors, $0 < \mathcal{H}^0(E) < +\infty$, donc en application du lemme 3.5, $\dim_{\mathcal{H}} E = 0$. Enfin, un ensemble dénombrable s'écrit comme l'union dénombrable de ses singletons. D'après la proposition 3.7, la dimension d'un ensemble dénombrable est donc également nulle.

Proposition 3.13. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{H}^s(E) = 0$ si et seulement si pour tout $\delta \in]0, +\infty]$, $\mathcal{H}^s_\delta(E) = 0$. De plus, si $\mathcal{H}^s_\infty(E) = 0$, alors $\mathcal{H}^s_\delta(E) = 0$, quel que soit $\delta \in]0, +\infty[$.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{H}^s(E) \geq \mathcal{H}^s_\delta(E)$, quel que soit $\delta \in]0, +\infty]$. Donc :

$$\mathcal{H}^s(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall \delta \in]0, +\infty],\ \mathcal{H}^s_\delta(E) = 0$$

On commence par écarter le cas où $s = 0$, qui nous ramène à la proposition 3.12. Supposons donc $s > 0$ et fixons $\varepsilon > 0$. $\mathcal{H}^s_\infty(E) = 0$, donc il existe $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}(E)$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2} \right)^s \leq \varepsilon$$

En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{diam} E_k \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{v_s} \right)^{1/s}$$

Posons donc $\delta = 2 \left(\frac{\varepsilon}{v_s} \right)^{1/s}$, de sorte que $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\delta(E)$. Donc $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \varepsilon$. Lorsque $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ et donc $\mathcal{H}^s(E) = 0$, comme attendu. □

3.3 Mesures de Hausdorff dans $\mathbb{R}$ et longueur de courbes

Proposition 3.14. *Lorsque $n = 1$, $\mathcal{H}^1 = \lambda^1$. Autrement dit, en dimension 1, la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle et la mesure de Lebesgue sont égales.*

Démonstration. On rappelle que sur $\mathbb{R}$, la mesure de Lebesgue est la seule mesure invariante par translation telle que $\lambda^1([0, 1]) = 1$. Or, la proposition 3.8 indique que $\mathcal{H}^1$ est également invariante par translation. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{H}^1([0, 1]) = 1$ pour en déduire que $\lambda^1 = \mathcal{H}^1$.

On commence par montrer que $\mathcal{H}^1([0, 1]) \leq 1$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ et on a :

$$[0, 1] = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right]$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^1_{\frac{1}{N}}([0,1]) &= \mathcal{H}^1_{\frac{1}{N}}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left[\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}\right]\right)\\
&\leq \sum_{k=1}^{N} v_1\left(\frac{\operatorname{diam}\left[\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}\right]}{2}\right)\\
&= 2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2N}\\
&= 1
\end{aligned}$$

On fait $N \to +\infty$, et on en déduit que $\mathcal{H}^1([0,1]) \leq 1$.

Pour l'autre inégalité, fixons $\delta > 0$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^1_{\delta}([0,1]) &= \inf_{(E_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{R}_\delta([0,1])}\sum_{k=0}^{+\infty} v_2\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\\
&\geq \inf_{(E_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{R}([0,1])}\sum_{k=0}^{+\infty} 2\cdot\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{H}^1_{\delta}([0,1]) \geq \inf_{(E_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{R}([0,1])}\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{diam} E_k \tag{3.5}$$

Or, $\mathcal{Q}([0,1]) \subset \mathcal{R}([0,1])$ donc :

$$\inf_{(E_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{R}([0,1])}\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{diam} E_k \leq \inf_{(E_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{Q}([0,1])}\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{diam} E_k$$

Soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}([0,1])$. Pour tout entier naturel k, on pose $a_k = \inf E_k$ et $b_k = \sup E_k$, de sorte que $\operatorname{diam}([a_k,b_k]) = \operatorname{diam} E_k$ et $([a_k,b_k])_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Q}([0,1])$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\inf_{(F_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{Q}([0,1])}\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{diam} F_k &\leq \sum_{k=0}^{+\infty}(b_k-a_k)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{diam} E_k
\end{aligned}$$

Par passage à la borne inférieure en $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}([0,1])$, on déduit que :

$$\inf_{(F_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{Q}([0,1])}\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{diam} F_k \leq \inf_{(E_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{R}([0,1])}\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{diam} E_k$$

La relation (3.5) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1_\delta([0,1]) &\geq \inf_{(F_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{Q}([0,1])} \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{diam} F_k \\ &= \lambda^1\left([0,1]\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{H}^1_\delta([0,1]) \geq 1$, d'où, en faisant tendre δ vers 0, $\mathcal{H}^1([0,1]) \geq 1$. Donc $\mathcal{H}^1([0,1]) = 1$ et $\mathcal{H}^1 = \lambda^1$. $\square$

On dit qu'une partie Γ de $\mathbb{R}^n$ est une *courbe* s'il existe $a > 0$ et une application $\gamma : [0,a] \to \mathbb{R}^n$ continue, injective telle que $\Gamma = \gamma([0,a])$. On dit que l'application γ est une *paramétrisation* de Γ. Si $I = [b,c]$ est un intervalle inclus dans $[0,a]$, on définit la longueur de γ le long de I comme suit :

$$\ell(\gamma,[b,c]) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^{N} \|\gamma(t_k - t_{k-1})\| \;\middle|\; b = t_0 < t_1 \ldots < t_N = c \right\} \tag{3.6}$$

Lemme 3.15. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe. Soient a_1, $a_2 > 0$ et $\gamma_1 : [0,a_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [0,a_2] \to \mathbb{R}^n$ deux paramétrisations de Γ. Alors, $\ell(\gamma_1,[0,a_1]) = \ell(\gamma_2,[0,a_2])$.*

Démonstration. γ_1 et γ_2 sont des paramétrisations donc sont injectives et donc bijectives sur leurs images. Par définition, $\Gamma = \gamma_1([0,a_1]) = \gamma_2([0,a_2])$. On pose $\theta \overset{\text{déf.}}{=} \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : [0,a_1] \to [0,a_2]$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $t_0,\ldots,t_N \in \mathbb{R}$ tels que :

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = a_1$$

Pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, on pose $s_k = \theta(t_k)$. Par composition, θ est continue et bijective, donc strictement monotone. Si θ est strictement croissante, alors $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = a_2$. Si θ est strictement décroissante, alors $a_2 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = 0$. De plus,

$$\forall k \in [\![1,N]\!],\; \left\|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1)}\right\| = \|\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})\|$$

D'où, en sommant :

$$\sum_{k=1}^{N} \|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{N} \|\gamma_1(t_{k-1}) - \gamma_1(t_k)\|$$

Par passage à la borne supérieure :

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{N} \|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1})\| \right) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{N} \|\gamma_1(t_{k-1}) - \gamma_1(t_k)\| \right),$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Définition 3.16 (Longueur d'une courbe de $\mathbb{R}^n$)**.** Soient $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe, $a > 0$ et $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de Γ. On définit la *longueur* de Γ par :

$$\ell(\Gamma) = \ell(\gamma, [0, a])$$

Le lemme précédent garantit que la quantité $\ell(\Gamma)$ est indépendante de la paramétrisation γ, de sorte que la définition a bien un sens.

L'objectif est d'établir un résultat donnant un lien entre la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle et la longueur d'une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Proposition 3.17. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe. Alors, $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \ell(\Gamma)$.*

Remarque. Cette propriété permet de donner une définition de la longueur d'une courbe qui est intrinsèque et qui ne nécessite pas de paramétrisation.

Démonstration. Soit $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de Γ. À titre de préliminaire, remarquons que par inégalité triangulaire :

$$\forall 0 \leq b \leq c \leq a, \ \ell(\gamma, [b, c]) \geq \|\gamma(b) - \gamma(c)\| \tag{3.7}$$

$$\forall 0 \leq b \leq d \leq c \leq a, \ \ell(\gamma, [b, c]) = \ell(\gamma, [b, d]) + \ell(\gamma, [d, c]) \tag{3.8}$$

On commence par démontrer que $\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \|\gamma(a) - \gamma(0)\|$, avec $\|\gamma(a) - \gamma(0)\|$ la distance entre les extrémités de la courbe. Pour ce faire, on considère $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la projection sur la droite $(\gamma(0), \gamma(a))$. En tant que projection, p est 1-lipschitzienne donc, en application de la proposition 3.11, $\mathcal{H}^1(p(\Gamma)) \leq \mathcal{H}^1(\Gamma)$. D'autre part, Γ est connexe car c'est l'image du segment $[0, a]$ par l'application continue γ. Donc $[\gamma(0), \gamma(a)] \subset p(\Gamma)$. Ainsi, $\mathcal{H}^1(p(\Gamma)) \geq \mathcal{H}^1([\gamma(0), \gamma(a)]) = \|\gamma(a) - \gamma(0)\|$, d'après la proposition 3.14.

Fixons $N \in \mathbb{N}$, et soient $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = a$. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, posons $\Gamma_k = \gamma([t_{k-1}, t_k])$. Alors,

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k$$

Or, γ est injective, donc si $k \in [\![1, N]\!]$, $\Gamma_{k-1} \cap \Gamma_k = \{\gamma(t_{k-1})\}$. En conséquence, $\mathcal{H}^1(\Gamma_{k-1} \cap \Gamma_k) = \mathcal{H}^1(\{\gamma(t_{k-1})\}) = 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\Gamma) &= \sum_{k=1}^{N} \mathcal{H}^1(\Gamma_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \end{aligned}$$

Par passage à la borne supérieure en $N \in \mathbb{N}$, on conclut que $\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \ell(\Gamma)$.

Reste à démontrer que $\mathcal{H}^1(\Gamma) \leq \ell(\Gamma)$. Pour ce faire, on construit une application $\gamma^* : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$ continue, injective, 1-lipschitzienne. On considère $v : \begin{cases} [0, a] \longrightarrow [0, \ell(\Gamma)] \\ \quad t \longmapsto \ell(\gamma, [0, t]) \end{cases}$. Alors, $v(0) = 0$ et $v(a) = \ell(\Gamma)$. De plus, v est croissante car si $0 \leq b < c \leq a$, alors $\ell(\gamma, [0, b]) \leq \ell(\gamma, [0, c])$. Vérifions que v est en fait strictement croissante. Pour ce faire, soient $b, c \in [0, a]$ avec $b \leq c$, tels que $\ell(\gamma, [b, c]) = 0$. Alors, d'après la relation (3.7), $\|\gamma(b) - \gamma(c)\| = 0$ donc $\gamma(b) = \gamma(c)$. Comme γ est injective, il s'ensuit que $b = c$ donc v est strictement croissante. Vérifions que v est de plus continue. Soit $t \in [0, a]$. Pour tout $s \in [0, t[$, on a :

$$\begin{aligned} v(t) - v(s) &= \ell(\gamma, [0, t]) - \ell(\gamma, [0, s]) \\ &= \ell(\gamma, [s, t]) \\ &\leq \mathcal{H}^1(\gamma([s, t])) \end{aligned}$$

En outre, $\bigcap_{s<t} \gamma([s, t]) = \{\gamma(t)\}$, donc :

$$\begin{aligned} \lim_{s \to t^-} \mathcal{H}^1(\gamma([s, t])) &= \mathcal{H}^1\left(\bigcap_{s<t} \gamma([s, t])\right) \\ &= \mathcal{H}^1(\{\gamma(t)\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $s \to t$ avec $s < t$, $v(t) - v(s) \to 0$. Donc v est continue. Donc v est inversible, on note $w : [0, \ell(\Gamma)] \to [0, a]$ son inverse. On définit maintenant $\gamma^* : \begin{cases} [0, \ell(\Gamma)] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \quad s \longmapsto \gamma(w(s)) \end{cases}$. On calcule, pour $s_1, s_2 \in [0, \ell(\Gamma)]$:

$$\begin{aligned} \|\gamma^*(s_1) - \gamma^*(s_2)\| &\overset{(3.7)}{\leq} \ell(\gamma^*, [s_1, s_2]) \\ &\overset{(3.8)}{=} \ell(\gamma^*, [0, s_2]) - \ell(\gamma^*, [0, s_1]) \\ &= \ell(\gamma, [0, w(s_2)]) - \ell(\gamma, [0, w(s_1)]) \\ &= v(w(s_2)) - v(w(s_1)) \\ &= s_2 - s_1 \end{aligned}$$

Au final, γ^* est 1-lipschitzienne, donc $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\gamma^*([0, \ell(\Gamma)])) \leq \mathcal{H}^1([0, \ell(\Gamma)]) = \ell(\Gamma)$. $\square$

4 Inégalité isodiamétrique et $\lambda^n = \mathcal{H}^n$

Dans cette section, on se propose de démontrer que lorsque $s = n$, la mesure de Hausdorff et la mesure de Lebesgue sont égales. Autrement dit, la mesure de

Hausdorff de dimension n dans $\mathbb{R}^n$ coïncide avec le volume. Avant de démontrer cela, un résultat préliminaire est requis, il s'agit de l'inégalité isodiamétrique. C'est un résultat un peu annexe (et tout à fait remarquable, bien que très intuitif) de géométrie, stipulant qu'à diamètre fixé, la boule maximise le volume.

4.1 Procédé de symétrisation de Steiner

Afin de démontrer l'inégalité isodiamétrique, nous allons utiliser le procédé de symétrisation de Steiner. C'est une construction qui, étant donnée une partie λ^n-mesurable E de $\mathbb{R}^n$, fournit une partie E^* de $\mathbb{R}^n$ symétrique par rapport à tous les axes de coordonnées, ayant la même mesure de Lebesgue mais un diamètre inférieur.

Pour $a, b \in \mathbb{R}^n$ (avec $\|a\| = 1$), on note $L_b^a = \{b + ta, t \in \mathbb{R}\}$ la droite passant par b de vecteur directeur a et $P_a = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x|a\rangle = 0\}$ l'hyperplan orthogonal à a passant par l'origine.

Définition 4.1 (Symétrisation de Steiner)**.** Soient $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|a\| = 1$ et $E \subset \mathbb{R}^n$. On définit le symétrisé de Steiner de E relativement au plan P_a par :

$$S_a(E) = \bigcup_{b \in P_a, A \cap L_b^a \neq \varnothing} \left\{ b + ta \,\middle|\, |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) \right\} \tag{4.1}$$

Lemme 4.2. *Soient $a \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 et $E \subset \mathbb{R}^n$. Alors :*

(i) $\operatorname{diam} S_a(E) \leq \operatorname{diam} E$.

(ii) Si E est λ^n-mesurable, alors $S_a(E)$ est aussi λ^n-mesurable et $\lambda^n(S_a(E)) = \lambda^n(E)$. Autrement dit, E et son symétrisé ont le même volume.

Démonstration. (i) Si $\operatorname{diam} E = +\infty$, il est clair que $\operatorname{diam} S_a(E) \leq \operatorname{diam} E$. Supposons donc que $\operatorname{diam} E < +\infty$. Comme E et $\overline{E}$ ont le même diamètre, on peut supposer que E est un ensemble fermé. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $x, y \in S_a(E)$ tels que :

$$\operatorname{diam} S_a(E) \leq \|x - y\| + \varepsilon \tag{4.2}$$

Posons $b = x - \langle x|a\rangle\, a, c = y - \langle y|a\rangle\, a$. Alors, $b, c \in P_a$, car :

$$\begin{aligned} \langle b|a\rangle &= \langle x - \langle x|a\rangle\, a|a\rangle \\ &= \langle x|a\rangle - \langle x|a\rangle \underbrace{\|a\|}_{=1} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle c|a\rangle &= \langle y - \langle y|a\rangle\, a|a\rangle \\ &= \langle y|a\rangle - \langle y|a\rangle \underbrace{\|a\|}_{=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
r &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid b + ta \in E\} \\
s &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid b + ta \in E\} \\
u &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid c + ta \in E\} \\
v &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid c + ta \in E\}
\end{aligned}$$

Quitte à échanger les rôles de x et y, on peut supposer que $v - r \geq s - u$. $E \cap L_b^a \subset \{b + ta \mid r \leq t \leq s\}$ et $E \cap L_c^a \subset \{b + ta \mid u \leq t \leq v\}$, donc :

$$\begin{aligned}
v - r &= \frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(v - r) \\
&\geq \frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(s - u)
\end{aligned}$$

En appliquant la proposition 3.14, on obtient :

$$\frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(s - u) \geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E \cap L_b^a) + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E \cap L_c^a)$$

Or, $x, y \in S_a(E)$ avec $x = b + \langle x|a\rangle\, a$ et $y = c + \langle y|a\rangle\, a$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E \cap L_b^a) + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E \cap L_c^a) &\geq |\langle x|a\rangle| + |\langle y|a\rangle| \\
&\geq |\langle x - y|a\rangle|
\end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$v - s \geq |\langle x - y|a\rangle|$$

E est fermé, donc $b + ra, c + va \in E$. La relation (4.2) permet de déduire que :

$$\begin{aligned}
(S_a(E) - \varepsilon)^2 &\leq \|x - y\|^2 \\
&= \|b - c\|^2 + (\langle x|a\rangle - \langle y|a\rangle)^2 \\
&\leq \|b - c\|^2 + (v - r)^2 \\
&= \|(b + ra) - (c + va)\|^2 \\
&\leq (\operatorname{diam} E)^2
\end{aligned}$$

En passant à la racine carrée, $S_a(E) - \varepsilon \leq \operatorname{diam} E$. Enfin, lorsque $\varepsilon \to 0$, il vient $\operatorname{diam} S_a(E) \leq \operatorname{diam} E$, comme attendu.

(ii) Pour le point (ii), on rappelle que λ^n est invariante par rotations, on peut donc se ramener à $a = e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, le n-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $P_a = P_{e_n} = \mathbb{R}^{n-1}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ définie par $f(b) = \mathcal{H}^1(E \cap L_b^{e_1})$. $\lambda^1 = \mathcal{H}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Fubini, f est λ^{n-1}-mesurable et :

$$\lambda^n(E) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db$$

En outre, $S_a(E)$ s'exprime comme $S_a(E) = \{(b, y) \mid \frac{-f(b)}{2} \leq y \leq \frac{f(b)}{2}\} \setminus \{(b, 0) \mid L_b^a \cap A = \varnothing\}$, qui sont deux parties λ^n-mesurable. Et on en déduit $\lambda^n(S_a(E)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db = \lambda^n(E)$.

□

Définition 4.3. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $E \subset \mathbb{R}^n$, on note $E_1 = S_{e_1}(E)$, $E_2 = S_{e_2}(E_1)$ et :

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ E_k = S_{e_k}(E_{k-1})$$

On note enfin $E^* = E_n$.

Proposition 4.4. *E^* est symétrique par rapport à chaque vecteur $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, E^* est symétrique par rapport à l'origine.*

Démonstration. On raisonne par récurrence. $E_1 = S_{e_1}(E)$ est symétrique par rapport à l'hyperplan P_{e_1}, ce qui initialise la récurrence.

Fixons maintenant $k \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons que pour tout $j \in \{1, \dots k\}$, E_k soit symétrique par rapport à P_{e_j}. Par définition, $E_{k+1} = S_{e_{k+1}}(E_k)$ est symétrique par rapport à $P_{e_{k+1}}$. Il suffit de montrer que E_{k+1} reste symétrique par rapport à $P_{e_1}, \dots, P_{e_k}$. Soit $j \in [\![1, k]\!]$. On note $\sigma_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la symétrie par rapport à l'hyperplan P_{e_j}, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_j(x) = \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} x_k e_k - x_j e_j$$

En particulier, $\sigma_j \circ \sigma_j = \mathrm{Id}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\sigma_j \circ \sigma_j(x) &= \sigma_j \left(\sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} x_k e_k - x_j e_j \right) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} x_k \sigma_j(e_k) - x_j \sigma_j(e_j) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} x_k e_k + x_k e_j \\
&= x
\end{aligned}$$

Soit $b \in P_{e_{k+1}}$. Montrons que $\mathcal{H}^1(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(E_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}})$. Soit $y \in \sigma_j(E_k \cap L_b^{e_{k+1}})$. Il existe $x \in E_k \cap L_b^{e_{k+1}}$ tel que $y = \sigma_j(x)$. Comme E_k est symétrique par rapport à P_{e_j}, $y \in E_k$. Étant donné que $x \in L_b^{e_{k+1}}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = b + te_{k+1}$. Donc $y = \sigma_j(x) = \sigma_j(b) + te_{k+1}$, et donc $y \in L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}}$. Ainsi

$$\sigma_j(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}) \subset E_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}} \tag{4.3}$$

Pour l'autre inclusion, on écrit :

$$\begin{align} E_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}} &= \sigma_j \circ \sigma_j(E_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}}) \tag{4.4}\\ &\subset \sigma_j(E_k \cap L_{\sigma_j \circ \sigma_j(b)}^{e_{k+1}}) \tag{4.5}\\ &= \sigma_j(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}) \tag{4.6} \end{align}$$

Ainsi, d'après (4.3) et (4.6),

$$\mathcal{H}^1(\sigma_j(E_k \cap L_b^{e_{k+1}})) = \mathcal{H}^1(E_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}})$$

Étant donné que σ_j est une isométrie,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\sigma_j(E_k \cap L_b^{e_{k+1}})) &= \mathcal{H}^1(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}) \\ &= \mathcal{H}^1(E_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}}) \end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= S_{e_{k+1}}(E_k) \\ &= \bigcup_{b \in P_{e_{k+1}}, E_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \varnothing} \left\{ b + te_{k+1} \,\middle|\, |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}) \right\} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_j(E_{k+1}) &= \bigcup_{b \in P_{e_{k+1}}, E_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \varnothing} \left\{ \sigma_j(b) + t\sigma_j(e_{k+1}) \,\middle|\, |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}) \right\} \\ &= \bigcup_{b \in P_{e_{k+1}}, E_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \varnothing} \left\{ \sigma_j(b) + te_{k+1} \,\middle|\, |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}}) \right\} \end{aligned}$$

Or, E_k est symétrique par rapport à l'hyperplan P_{e_j}, donc :

$$\forall b \in P_{e_{k+1}},\ (E_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \varnothing) \iff (E_k \cap L_{\sigma_j(b)}^{e_{k+1}} \neq \varnothing)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_j(E_{k+1}) &= \bigcup_{b \in P_{e_{k+1}}, E_k \cap L_b^{e_{k+1}} \neq \varnothing} \left\{ b + te_{k+1} \,\middle|\, |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(E_k \cap L_b^{e_{k+1}}) \right\} \\ &= E_{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi, E_{k+1} est symétrique par rapport à à P_{e_j}. Par récurrence, il s'établit que E_{k+1} est symétrique par rapport à $P_{e_1}, \ldots, P_{e_{k+1}}$ et donc $E^* = E_n$ est symétrique par rapport à tous les hyperplans $(P_{e_k})_{1 \leq k \leq n}$, i.e. E^* est symétrique par rapport à l'origine. $\square$

Théorème 4.5 (Inégalité isodiamétrique)**.** *Quel que soit $E \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\lambda^n (E) \leq v_n \left(\frac{\operatorname{diam} E}{2} \right)^n \tag{4.7}$$

Remarque. Ce théorème dit que, parmi tous tous les domaines de $\mathbb{R}^n$ de diamètre donné, c'est la boule qui a le volume maximal.

Démonstration. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On commence par montrer que $\lambda^n (E) \leq v_n \left(\frac{\operatorname{diam} E^*}{2} \right)^n$. Soit $x \in E^*$. Comme E^* est symétrique par rapport à l'origine, $-x \in E^*$ donc $\operatorname{diam} E^* \geq 2 \|x\|$ i.e. $\|x\| \leq \frac{\operatorname{diam} E^*}{2}$. Donc $x \in B \left(0, \frac{\operatorname{diam} E^*}{2} \right)$. Donc :

$$\begin{aligned} \lambda^n (E^*) &\leq \lambda^n \left(B \left(0, \frac{\operatorname{diam} E^*}{2} \right) \right) \\ &= v_n \left(\frac{\operatorname{diam} E^*}{2} \right)^n \end{aligned}$$

L'inégalité isodiamétrique est donc établie pour E^*. Reste donc à la démontrer pour l'ensemble E. $\overline{E}$ est un fermé donc est λ^n-mesurable et $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \overline{E}$. D'après le lemme 4.2, $\lambda^n \left(\overline{E}^* \right) = \lambda^n \left(\overline{E} \right)$ et $\operatorname{diam} \overline{E}^* \leq \operatorname{diam} \overline{E}$. $E \subset \overline{E}$ donc :

$$\begin{aligned} \lambda^n (E) &\leq \lambda^n \left(\overline{E} \right) \\ &\leq v_n \left(\frac{\operatorname{diam} \overline{E}^*}{2} \right)^n \\ &= v_n \left(\frac{\operatorname{diam} E}{2} \right)^n \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité (4.7). $\square$

4.2 Propriétés de recouvrement

Avant de pouvoir démontrer que $\mathcal{H}^n = \lambda^n$, quelques propriétés de recouvrement sont nécessaires. Rappelons d'abord ce qu'est un ensemble inductif ainsi que le lemme de Zorn.

Définition 4.6 (Ensemble inductif)**.** Soit $(\xi, \preceq)$ un ensemble ordonné. ξ est dit inductif si toute partie totalement ordonnée de ξ possède un majorant, i.e. :

$$\forall \zeta \subset \xi, \quad (\forall x, y \in \zeta,\ x \preceq y \text{ ou } y \preceq x) \implies (\exists z \in \xi, \forall x \in \zeta,\ x \preceq z)$$

Lemme 4.7 (de Zorn)**.** *Tout ensemble inductif admet un élément maximal.*

Définition 4.8. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'une famille $\mathcal{E}$ de boules fermées dans $\mathbb{R}^n$ forme un *recouvrement fin* de E si $\mathcal{E}$ recouvre E et si de plus :

$$\forall x \in E,\ \inf_{B \in \mathcal{E}} \{\operatorname{diam} B \mid x \in B\} = 0$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est un recouvrement fin de E si tout élément x de E est contenu dans une boule de rayon arbitrairement petit.

Si $B = \overline{B}(x, r)$, avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $\hat{B} = \overline{B}(x, 5r)$ la boule fermée de centre x et de rayon $5r$.

Théorème 4.9 (Théorème de recouvrement de Vitali)**.** *Soit $\mathcal{E}$ une famille de boules fermées de $\mathbb{R}^n$ de rayons non nuls, telle que*

$$\sup_{B \in \mathcal{E}} (\operatorname{diam} B) < +\infty$$

Alors, il existe une famille dénombrable $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ de boules deux à deux disjointes telle que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{E}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} \hat{B} \tag{4.8}$$

Démonstration. On pose $\Delta = \sup_{B \in \mathcal{E}} (\operatorname{diam} B)$ et pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\mathcal{E}_j = \left\{ B \in \mathcal{E} \;\middle|\; \frac{\Delta}{2^j} < \operatorname{diam} B \leq \frac{\Delta}{2^{j-1}} \right\}$$

À l'aide du lemme de Zorn, construisons $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}_1$ une famille maximale dénombrable de boules deux à deux disjointes. On définit :

$$\xi = \left\{ \mathcal{A} \;\middle|\; \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I_{\mathcal{A}}} A_i, \quad (\forall i \in I_{\mathcal{A}},\ A_i \in \mathcal{E}_1) \text{ et } (\forall i, j \in I_{\mathcal{A}},\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing) \right\}$$

Sur ξ, on définit la relation $\preceq$ par :

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \xi, \quad \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \iff I_{\mathcal{A}} \subset I_{\mathcal{B}}$$

Si $\mathcal{A} \in \xi$, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \xi$ vérifient $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$, alors $I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{B}}$ donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Enfin, si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \xi$ avec $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$, alors $I_{\mathcal{A}} \subset I_{\mathcal{C}}$ i.e. $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$. Donc $\preceq$ définit une relation d'ordre sur ξ. Vérifions que ξ est inductif, i.e. que toute partie totalement ordonnée de ξ admet un majorant. Pour ce faire, soit $\zeta \subset \xi$ une partie totalement ordonnée, i.e. :

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \zeta,\ \mathcal{A} \preceq B \text{ ou } \mathcal{B} \preceq A$$

Mais alors, pour tous $\mathcal{A}, B \in \zeta$, il existe $I_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{B}}$ deux ensembles d'indices et $(A_i)_{i\in I_{\mathcal{A}}}, (B_j)_{j\in I_{\mathcal{B}}}$ deux familles de boules deux à deux disjointes de $\mathcal{E}_1$, tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \bigcup\limits_{i\in I_{\mathcal{A}}} A_i,\ \mathcal{B} = \bigcup\limits_{j\in I_{\mathcal{B}}} B_j \\ \forall i \in I_{\mathcal{A}}, \forall j \in I_{\mathcal{B}}, \quad (A_i \cap B_j \neq \varnothing) \Leftrightarrow (A_i = B_j) \end{cases}, \tag{4.9}$$

On pose $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{A}\in\zeta} \mathcal{A}$. D'après (4.9), $\mathcal{C}$ est une réunion de boules deux à deux disjointes contenues dans $\mathcal{E}_1$ donc $\mathcal{C} \in \xi$. Par construction, $\mathcal{C}$ est un majorant de ζ, car :

$$\forall \mathcal{A} \in \zeta,\ I_{\mathcal{A}} \subset I_{\mathcal{C}}$$

Ainsi, ξ est un ensemble inductif. D'après le lemme de Zorn, ξ admet un élément maximal, que l'on note $\mathcal{F}_1$. Vérifions maintenant que $\mathcal{F}_1$ est dénombrable. Il existe I un ensemble d'indices et $(F_i)_{i\in I}$ des boules deux à deux disjointes tels que :

$$\mathcal{F}_1 = \bigcup_{i\in I} F_i$$

Pour tout $i \in I$, existe $q_i \in \mathbb{Q}^n \cap B_i$, car $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ et F_i est d'intérieur non vide. De plus, si $i, j \in I$ avec $i \neq j$, alors $F_i \cap F_j = \varnothing$ donc $q_i \neq q_j$. Ainsi, l'application $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{Q}^n \\ i \longmapsto q_i \end{cases}$ est une injection, donc I est dénombrable, car $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable. En fin de compte, on a construit $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}_1$ une famille maximale et dénombrable de boules deux à deux disjointes.

On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et on suppose construites $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k-1}$ des familles maximales de boules deux à deux disjointes. Par récurrence, on définit $\mathcal{F}_k$ une famille maximale dénombrable de boules deux à deux disjointes telle que

$$\mathcal{F}_k \subset \left\{ B \in \mathcal{E}_k \,\middle|\, \forall B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{F}_j, B \cap B' \neq \varnothing \right\}$$

On pose également :

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k$$

Par construction, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est une famille de boules deux à deux disjointes.

Montrons que quel que soit $B \in \mathcal{E}$, il existe $B' \in \mathcal{F}$ tel que $B \cap B' = \varnothing$ et $B \subset \hat{B}'$. Soit donc $B \in \mathcal{E}$. Il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $B \in \mathcal{E}_j$. Par maximalité de la famille $\mathcal{F}_j$,

$$\exists B' \in \mathcal{F}_j,\ B \cap B' \neq \varnothing$$

En particulier, $B' \in \bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{E}_k$, donc $\operatorname{diam} B' > \frac{\Delta}{2^j}$. De la même manière, $B \in \mathcal{E}_j$ donc $\operatorname{diam} B \leq \frac{\Delta}{2^{j-1}}$. Ainsi, $\operatorname{diam} B \leq 2 \operatorname{diam} B'$. D'où $\hat{B}' \supset B$. Enfin, B étant arbitraire dans $\mathcal{E}$, on déduit (4.8), ce qui démontre le théorème de recouvrement de Vitali. $\square$

C'est surtout le corollaire suivant qui nous sera utile pour démontrer que $\mathcal{H}^n = \lambda^n$.

Corollaire 4.10. *Soient $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\delta > 0$. Il existe $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de boules fermées deux à deux disjointes incluses dans O, de rayons au plus δ, et telle que*

$$\lambda^n \left(O \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right) = 0$$

Démonstration. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$, que l'on suppose de mesure de Lebesgue finie, i.e. $\lambda^n(O) < +\infty$. Soit $\alpha \in \left]1 - \frac{1}{5^n}, 1\right[$.

On commence par démontrer qu'il existe $M_1 \in \mathbb{N}^*$ et $B_1, \ldots, B_{M_1}$ des boules fermées deux à deux disjointes, incluses dans O, de rayons au plus δ, telles que

$$\lambda^n \left(O \setminus \bigcup_{k=1}^{M_1} B_k \right) \leq \alpha \lambda^n(O) \tag{4.10}$$

Soit $\mathcal{E}_1 = \{B \subset O \mid \operatorname{diam} B < \delta \text{ et } B \text{ est une boule fermée}\}$. D'après le théorème 4.9, il existe $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}_1$ une famille dénombrable de boules deux à deux disjointes telle que

$$O \subset \bigcup_{B\in\mathcal{F}_1} \hat{B}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lambda^n(O) &\leq \sum_{B\in\mathcal{F}_1} \lambda^n\left(\hat{B}\right) \\ &\leq 5^n \lambda^n \left(\bigcup_{B\in\mathcal{F}_1} B \right) \\ \text{i.e.} \qquad \lambda^n \left(\bigcup_{B\in\mathcal{F}_1} B \right) &\geq \frac{1}{5^n} \lambda^n(O) \end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\lambda^n(O) &= \lambda^n(O) - \frac{1}{5^n}\lambda^n(O)\\ &\geq \lambda^n(O) - \lambda^n\left(\bigcup_{B\in\mathcal{F}_1} B\right)\\ &\geq \lambda^n\left(O \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{F}_1} B\right)\end{aligned}$$

Si l'on note $\mathcal{F}_1 = (B_k)_{k\geq 1}$, la suite $(O \setminus \bigcup_{k=1}^{M} B_k)_{M\geq 1}$ est décroissante. Comme de plus $\lambda^n(O) < +\infty$, on écrit :

$$\lambda^n\left(O \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{F}_1}\right) = \lim_{M\to+\infty} \lambda^n\left(O \setminus \bigcup_{k=1}^{M} B_k\right)$$

Donc quel que soit $\alpha \in \left]1-\frac{1}{5^n}, 1\right[$, il existe M_1 un entier naturel non nul et $M_1, \ldots, B_{M_1} \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}_1$ conformes à (4.10) :

$$\lambda^n\left(O \setminus \bigcup_{k=1}^{M_1} B_k\right) \leq \alpha\lambda^n(O)$$

On cherche à itérer cette construction. Pour ce faire, on pose :

$$\begin{aligned} &O_2 = O \setminus \bigcup_{k=1}^{M_1} B_k\\ \text{et}\quad &\mathcal{E}_2 = \{B \subset O_2 \mid \operatorname{diam} B < \delta \text{ et } B \text{ est une boule fermée}\}\end{aligned}$$

Le même raisonnement permet d'obtenir un entier $M_2 > M_1$ et des boules deux à deux disjointes $B_{M_1+1}, \ldots, B_{M_2} \in \mathcal{E}_2$ tels que

$$\begin{aligned}\lambda^n\left(O \setminus \bigcup_{k=1}^{M_2} B_k\right) &= \lambda^n\left(O_2 \setminus \bigcup_{k=M_1+1}^{M_2} B_k\right)\\ &\leq \alpha\lambda^n(O_2)\\ &\leq \alpha^2\lambda^n(O)\end{aligned}$$

En itérant cette construction, on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \exists M_j \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^n\left(O \setminus \bigcup_{k=1}^{M_j} B_k\right) \leq \alpha^j\lambda^n(O)$$

Or, $|\alpha| < 1$ donc $\lim_{j\to+\infty} \alpha^j = 0$. Ainsi,

$$\lambda^n\left(O \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = 0$$

Pour démontrer ce corollaire lorsque $\lambda^n(0) = +\infty$, on pose $O_k = \{x \in O \mid k < \|x\| < k+1\}$. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\lambda^n(O_k) < +\infty$, donc on applique la construction précédente. On obtient ainsi un nombre dénombrable de familles dénombrables $\mathcal{F}$, et comme $O = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k$, le corollaire est démontré. □

4.3 $\mathcal{H}^n = \lambda^n$

Théorème 4.11. *Quel que soit $E \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\lambda^n(E) = \mathcal{H}^n(E) \tag{4.11}$$

Démonstration. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Démontrons que $\lambda^n(E) \leq \mathcal{H}^n(E)$. Soient $\delta > 0$ et $(F_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\delta(E)$. D'après l'inégalité isodiamétrique,

$$v_n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} F_k}{2}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^n(F_k)$$

On passe à la borne inférieure en $(F_k)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\delta(E)$, ce qui donne :

$$\mathcal{H}^n_\delta(E) \geq \lambda^n(E)$$

Enfin, en faisant tendre δ vers 0, il vient :

$$\mathcal{H}^n(E) \geq \lambda^n(E)$$

Démontrons maintenant que $\lambda^n(E)\, v_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \geq \mathcal{H}^n_\infty(E)$. Par définition,

$$\mathcal{H}^n_\infty(E) = \inf_{\mathcal{F}\in\mathcal{R}(E)} \sum_{F\in\mathcal{F}} v_n \left(\frac{\operatorname{diam} F}{2}\right)^n$$

Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Q}(E) \subset \mathcal{R}(E)$ un recouvrement de E par des cubes dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Pour $F \in \mathcal{F}$, on note $r(F)$ la longueur du côté du cube F, de sorte que $\operatorname{diam} F = \sqrt{n} r(F)$. $\mathcal{F}$ est un recouvrement admissible pour calculer $\mathcal{H}^n_\infty(E)$, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\infty(E) &\leq \sum_{F\in\mathcal{F}} v_n \left(\frac{\operatorname{diam} F}{2}\right)^n \\
&= v_n \sum_{F\in\mathcal{F}} \left(\frac{\sqrt{n} r(F)}{2}\right)^n \\
&= v_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \sum_{F\in\mathcal{F}} r(F)^n
\end{aligned}$$

Par passage à la borne inférieure sur $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{H}^n_\infty(E) \leq v_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \lambda^n(E) \tag{4.12}$$

Démontrons maintenant que $\lambda^n(E) \geq \mathcal{H}^n(E)$. Lorsque $\lambda^n(E) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $\lambda^n(E) < +\infty$. Soient $\varepsilon, \delta > 0$. D'après la proposition 1.7, il existe A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $E \subset A$ et $\lambda^n(E) + \varepsilon \geq \lambda^n(A)$. D'après le corollaire 4.10, il existe $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de boules fermées, deux à deux disjointes, contenues dans A et de diamètre au plus δ, vérifiant

$$\lambda^n\left(A \setminus \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right) = 0$$

$$\text{i.e.} \quad \lambda^n(A) = \lambda^n\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lambda^n(E) + \varepsilon &\geq \lambda^n(A) \\ &= \lambda^n\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right)\end{aligned}$$

Comme la famille $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de boules deux à deux disjointes,

$$\begin{aligned}\lambda^n(E) + \varepsilon &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^n(F_k) \\ &= v_n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} F_k}{2}\right)^n \\ &\geq \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right)\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (4.12), on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_\infty\left(E \setminus \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right) &\leq v_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \lambda^n\left(E \setminus \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

En appliquant la proposition 3.13, on déduit :

$$\begin{aligned}\lambda^n(E) + \varepsilon &\geq \mathcal{H}^n_\delta\left(E \setminus \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right) + \mathcal{H}^n_\delta\left(E \cap \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right) \\ &\geq \mathcal{H}^n_\delta(E)\end{aligned}$$

Enfin, lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\delta \to 0$, on déduit que $\lambda^n(E) \geq \mathcal{H}^n(E)$. En conclusion, $\mathcal{H}^n(E) = \lambda^n(E)$, quel que soit $E \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

5 Une application : l'ensemble de Cantor

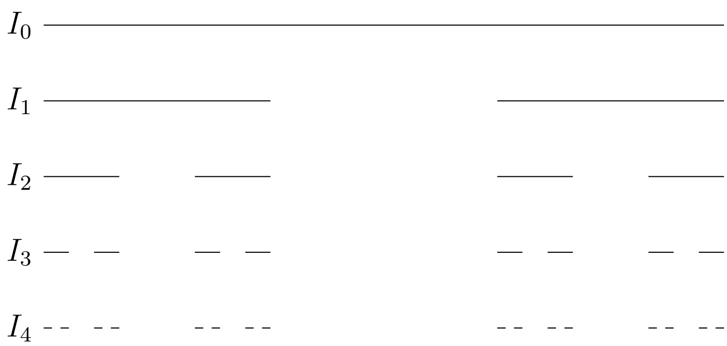
Dans cette partie, nous nous proposons de calculer la dimension de l'ensemble triadique de Cantor — que nous appellerons simplement *ensemble de Cantor*. Ce sera l'occasion de mieux observer les différences qui existent entre les mesures de Lebesgue et de Hausdorff, et d'être confronté à un ensemble de dimension non entière.

5.1 Construction de l'ensemble de Cantor et propriétés

Commençons par rappeler la construction de l'ensemble de Cantor. On note $I_0 = [0,1]$. Puis on définit par récurrence :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3}I_0 \cup \left(\frac{1}{3}I_0 + \frac{2}{3}\right) \\ \forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} &= \frac{1}{3}I_k \cup \left(\frac{1}{3}I_k + \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Pour les premières itérations, on obtient le célèbre dessin suivant :



Définition 5.1. L'ensemble de Cantor est noté $\mathcal{K}$ et est défini par :

$$\mathcal{K} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} I_k$$

Pour chaque entier naturel k, I_k est composé de 2^k intervalles disjoints, tous de longueurs 3^{-k}. Ces intervalles seront appelés *intervalles élémentaires de niveau k* et notés $I_k^1, \ldots, I_k^{2^k}$. On note également $\mathcal{I}_k = (I_k^i)_{1 \leq i \leq 2^k}$.

Proposition 5.2. *$\mathcal{K}$ est compact.*

Démonstration. $\mathcal{K}$ est une intersection dénombrable d'ensembles fermés donc est fermé. Il est inclus dans $[0,1]$ donc est borné. Donc c'est un compact de $[0,1]$. □

Proposition 5.3. *L'ensemble de Cantor est λ^1-négligeable, i.e. :*

$$\lambda^1(\mathcal{K}) = 0$$

Remarque. D'après l'inégalité isodiamétrique, $\lambda^1 = \mathcal{H}^1$, donc on a également $\mathcal{H}^1(\mathcal{K}) = 0$.

Démonstration. Montrons par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lambda^1(I_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \tag{5.1}$$

Lorsque $k = 0$, $I_k = [0, 1]$ et $\lambda^1([0, 1]) = 1$. Supposons que pour un entier naturel k, la relation (5.1) soit vérifiée. Calculons $\lambda^1(I_{k+1})$:

$$\begin{aligned}
\lambda^1(I_{k+1}) &= \lambda^1\left(\frac{1}{3}I_k \cup \left(\frac{1}{3}I_k + \frac{2}{3}\right)\right)\\
&= \lambda^1\left(\frac{1}{3}I_k\right) + \lambda^1\left(\frac{1}{3}I_k\right)\\
&= \frac{2}{3}\lambda^1(I_k)\\
&\overset{\text{h.r.}}{=} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, la relation (5.1) s'établit.

Or, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} \subset I_k$, donc :

$$\begin{aligned}
\lambda^1(\mathcal{K}) &\leq \lambda^1(I_k)\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^k
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $k \to +\infty$, on obtient $\lambda^1(\mathcal{K}) \leq 0$ et donc $\lambda^1(\mathcal{K}) = 0$. □

Proposition 5.4. *$\mathcal{K}$ est d'intérieur vide. Autrement dit, il ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.*

Démonstration. Soit I un intervalle ouvert non vide inclus dans $[0, 1]$. Comme I est non vide, il est de longueur non nulle ; notons $\ell > 0$ cette longueur. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, I_k est composé de 2^k intervalles fermés tous de longueur 3^{-k}. Or, pour k assez grand, $\ell > 3^{-k}$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que I ne soit inclus dans aucune composante connexe de I_k. A fortiori, I ne peut pas être inclus dans $\mathcal{K}$. Donc $\mathcal{K}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide, i.e. $\mathcal{K}$ est d'intérieur vide. □

Proposition 5.5. *$\mathcal{K}$ est indénombrable.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $f : \mathbb{N}^* \to \mathcal{K}$ une bijection, de sorte que $f(\mathbb{N}^*) = \mathcal{K}$. I_1 admet une composante connexe, notée $\widetilde{I_1}$, qui ne contient pas $f(1)$. I_2 admet une composante connexe, que l'on note $\widetilde{I_2}$, avec $\widetilde{I_2} \subset \widetilde{I_1}$ et telle que $f(2) \notin \widetilde{I_1}$. Par récurrence, si l'on dispose d'une composante connexe $\widetilde{I_k}$ de I_k pour un certain entier naturel k, on construit $\widetilde{I_{k+1}}$ une composante connexe de I_{k+1}, avec $\widetilde{I_{k+1}} \subset \widetilde{I_k}$ et $f(k+1) \notin \widetilde{I_{k+1}}$. Quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) \notin \widetilde{I_k}$, donc la suite $(\widetilde{I_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\begin{cases} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \widetilde{I_k} \subset \bigcap_{k=0}^{+\infty} I_k = \mathcal{K} \\ \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \widetilde{I_k}\right) \cap \mathcal{K} = \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \widetilde{I_k}\right) \cap f(\mathbb{N}^*) = \varnothing \end{cases} \tag{5.2}$$

De plus, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\widetilde{I_{k+1}} \subset \widetilde{I_k}$ et $\widetilde{I_k}$ est un fermé. Donc $(\widetilde{I_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés emboîtés dont le diamètre tend vers 0. D'après (5.2),

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} \widetilde{I_k} = \varnothing,$$

ce qui entre en contradiction avec le théorème des segments emboîtés [2]. □

5.2 Calcul de la dimension

Théorème 5.6. *L'ensemble de Cantor est de dimension $\frac{\ln 2}{\ln 3}$, i.e.*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{K}) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \tag{5.3}$$

Cette valeur pouvant sembler surprenante, nous allons chercher à en avoir une intuition avant de la démontrer rigoureusement. Commençons donc par quelques calculs heuristiques. On peut remarquer que l'ensemble de Cantor se décompose en deux parties disjointes $F_G = \mathcal{K} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$ et $F_D = \mathcal{K} \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. En outre, $3F_G$ et $3F_D - \frac{2}{3}$ permettent de retrouver, géométriquement, l'ensemble $\mathcal{K}$ de départ. D'après la proposition 3.9, on obtient pour tout $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) &= \mathcal{H}^s(F_G) + \mathcal{H}^s(F_D) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) \end{aligned}$$

2. Le théorème des segments emboîtés stipule que l'intersection d'une suite décroissante d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ dont le diamètre tend vers 0 est réduite à un singleton.

Sous réserve que $s = \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{K})$ avec $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) < +\infty$, on peut obtenir, en divisant de part et d'autre par $\mathcal{H}^s(\mathcal{K})$, l'égalité $1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$ i.e. $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Mais l'hypothèse $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) < +\infty$ est précisément le point qui doit être éclairci. L'idée est que l'ensemble de Cantor est composé de « deux homothéties » de lui-même, de rapport $\frac{1}{3}$. Formalisons maintenant ce raisonnement.

Démonstration. Pour alléger les notations, on note $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. D'après le lemme 3.5, pour montrer que $\dim(\mathcal{K}) = s$, il suffit de montrer que $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) < +\infty$. On va en fait montrer que $v_s 2^{-(s+1)} \leq \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) \leq v_s$.

Commençons par démontrer que $\mathcal{H}^s(\mathcal{K}) \leq v_s$. Soient $\delta > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $3^{-k} \leq \delta$. On rappelle que I_k désigne la k-ième itération de la construction de l'ensemble de Cantor. I_k est donc la réunion disjointe de 2^k intervalles de longueur 3^{-k} ; on note $\mathcal{I}_k = (I_k^i)_{1 \leq i \leq 2^k}$ ces intervalles. Quel que soit $i \in [\![1, 2^k]\!]$, $\operatorname{diam} I_k^i = 3^{-k} < \delta$, donc $\mathcal{I}_k$ est un δ-recouvrement de $\mathcal{K}$, et :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{K}) &\leq \sum_{i=1}^{2^k} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} I_k^i}{2}\right)^s \\
&= 2^{-s} v_s \sum_{i=1}^{2^k} 3^{-ks} \\
&= 2^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}} v_s \underbrace{\left(2 \cdot 3^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right)^k}_{=1}
\end{aligned}$$

Or, $2^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}} < 1$, donc

$$\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{K}) < v_s$$

On passe à la limite lorsque $\delta \to 0^+$, et on en déduit que $\mathcal{H}^s(\mathcal{K}) \leq v_s$.

Montrons que $\mathcal{H}^s(\mathcal{K}) \geq v_s 2^{-(s+1)}$. Soit $\delta > 0$ et soit $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\delta(\mathcal{K})$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{cases} \alpha_k = \inf(E_k \cap \mathcal{K}) \\ \beta_k = \sup(E_k \cap \mathcal{K}) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^s \geq \sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2}\right)^s$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$L_k = \left]\alpha_k - \left(\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)^{-s}, \beta_k + \left(\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)^{-s}\right[$$

Ainsi, $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\mathcal{K}$ par des intervalles ouverts. Comme $\mathcal{K}$ est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Quitte à réordonner les éléments de la famille $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on peut donc trouver un entier naturel N tel que $(L_k)_{0\leq k\leq N}$ forme un recouvrement de $\mathcal{K}$. On note maintenant, pour $k \in [\![0, N]\!]$,

$$\begin{cases} a_k = \max\left(0, \alpha_k - \left(\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)^{-s}\right) \\ b_k = \min\left(1, \beta_k + \left(\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)^{-s}\right) \end{cases}$$

Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on définit $J_k \overset{\text{déf.}}{=} [a_k, b_k]$. Ainsi, $(J_k)_{0\leq k\leq N}$ est un recouvrement de $\mathcal{K}$ par des intervalles fermés tous inclus dans $[0, 1]$. On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2}\right)^s &\geq \sum_{k=0}^{N} v_s \left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2}\right)^s \\ &\geq \sum_{k=0}^{N} v_s \left(\left(\frac{b_k - a_k}{2}\right)^s - 2^s \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) \qquad \text{car } s < 1\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2}\right)^s &\geq \sum_{k=0}^{N} v_s \left(\frac{b_k - a_k}{2}\right)^s - 2^s v_s \varepsilon && (5.4) \\ &= v_s \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\text{diam } J_k}{2}\right)^s - 2^s v_s \varepsilon && (5.5)\end{aligned}$$

Minorons $\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\text{diam } J_k}{2}\right)^s$. Soit $j \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que :

$$3^{-(j+1)} \leq \min_{0\leq k\leq N} \text{diam } J_k$$

Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $J_k \subset [0, 1]$ donc diam $J_k \leq 1$ et par définition de j, diam $J_k \geq 3^{-(j+1)}$. Donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \exists i(k) \in [\![0, j]\!],\ 3^{-(i(k)+1)} \leq \text{diam } J_k < 3^{-i(k)}$$

Maintenant, pour tout $i \in [\![0, j]\!]$, on note M_i le nombre d'intervalles J_k tels que $3^{-(i+1)} \leq \text{diam } J_k < 3^{-i}$, pour $k \in [\![0, N]\!]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\text{diam } J_k}{2}\right)^s &= 2^{-s} \sum_{k=0}^{N} (\text{diam } J_k)^s && (5.6) \\ &\geq 2^{-s} \sum_{i=0}^{j} M_i 3^{-(i+1)s} && (5.7) \\ &= 2^{-s} \sum_{i=0}^{j} M_i 2^{-(i+1)} \qquad \text{car } 3^s = 2 && (5.8)\end{aligned}$$

De plus, quels que soient $i \in [\![0, j]\!]$ et $k \in [\![0, N]\!]$, si $3^{-(i+1)} \leq \operatorname{diam} J_k < 3^{-i}$, alors J_k intersecte au plus deux intervalles élémentaires de $\mathcal{I}_{i+1}$. Chacun de ces (au plus) deux intervalles contient 2^{j-i} intervalles élémentaires de $\mathcal{I}_{j+1}$, pour tout $i \leq j$. Donc quels que soient $k \in [\![0, N]\!]$ et $i \in [\![0, j]\!]$, J_k intersecte au plus $2 \cdot 2^{j-i}$ intervalles élémentaires de $\mathcal{I}_{j+1}$. Donc pour tout $i \in [\![0, j]\!]$, $\bigcup\{J_k \mid k \in [\![0, N]\!], 3^{-(i+1)} \leq \operatorname{diam} J_k < 3^{-i}\}$ intersecte au plus $M_i \cdot 2 \cdot 2^{j-i}$ intervalles élémentaires de $\mathcal{I}_{j+1}$. En conséquence,

$$\bigcup_{k=0}^{N} J_k \text{ intersecte au plus } \sum_{i=0}^{j} M_i 2 \cdot 2^{j-i} \text{ intervalles élémentaires de } \mathcal{I}_{j+1} \tag{5.9}$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $\operatorname{diam} J_k \geq 3^{-(j+1)}$, et $3^{-(j+1)}$ est exactement la distance minimale entre deux intervalles élémentaires de $\mathcal{I}_{j+1}$. Donc $\bigcup_{k=0}^{N} J_k$ intersecte tous les intervalles élémentaires de $\mathcal{I}_{j+1}$, qui sont au nombre de 2^{j+1}. Nécessairement, le nombre maximal d'intervalles que $\bigcup_{k=0}^{N} J_k$ intersecte est donc plus grand que 2^{j+1}. D'après la relation (5.9), on a donc :

$$\begin{aligned} 2^{j+1} &\leq \sum_{i=0}^{j} M_i 2 \cdot 2^{j-i} \\ \text{i.e.} \quad \frac{1}{2} &\leq \sum_{i=0}^{j} M_i 2^{-(i+1)} \end{aligned}$$

On déduit donc de (5.8) que :

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\operatorname{diam} J_k}{2} \right)^s \geq 2^{-s} \frac{1}{2}$$

Il s'ensuit que (5.5) permet d'obtenir :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2} \right)^s \geq v_s 2^{-s} \frac{1}{2} - 2^s v_s \varepsilon$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2} \right)^s \geq 2^{-s} \frac{v_s}{2} - 2^s v_s \varepsilon$$

ε étant arbitraire, on peut le faire tendre vers 0 et déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_s \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2} \right)^s \geq 2^{-s} \frac{v_s}{2}$$

Puis, par passage à la borne inférieure en $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\delta(\mathcal{K})$, on trouve :

$$\mathcal{H}^s_\delta(\mathcal{K}) \geq 2^{-(s+1)} v_s$$

Enfin, en faisant $\delta \to 0$, on obtient l'inégalité annoncée :

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{K}) \geq 2^{-(s+1)} v_s$$

$\square$

Références

[1] M. Damron : Dimension of the Cantor set. https://web.math.princeton.edu/~mdamron/teaching/F11/hausdorff.pdf. Consulté le 19 mai 2015.

[2] L. C. Evans et R. F. Gariepy : *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992.

[3] K. Falconer : *Fractal Geometry.* Wiley, seconde édition, 2003.

[4] F. Maggi : *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems, An Introduction to Geometric Measure Theory.* Cambridge University Press, 2012.